

Zur Begründung des optischen Kernmodells

Von P. MITTELSTAEDT

Aus dem Max-Planck-Institut für Physik, Göttingen
(Z. Naturforsch. 12 a, 675—678 [1957]; eingegangen am 12. Juli 1957)

Der Imaginärteil des optischen Kernpotentials läßt sich näherungsweise mit Hilfe der GOLDBERGER-Methode und mit der BRUECKNERSchen Störungstheorie berechnen. Es wird ein Vergleich dieser beiden Methoden durchgeführt, und die Unterschiede in den berechneten Ausdrücken für das Imaginärpotential werden genauer diskutiert.

Die Streuung und Absorption von Nukleonen an einem komplexen Kern läßt sich in einem gewissen Energiebereich (etwa zwischen 1 und 20 MeV) im Rahmen einer phänomenologischen Theorie durch die Streuung an einem komplexen Potential beschreiben¹. Eine theoretische Begründung der Tatsache, daß sich das komplizierte Vielteilchenproblem, das der Streuprozess an sich darstellt, in dem betrachteten Fall näherungsweise auf ein Einteilchenproblem reduzieren läßt, ist in den letzten Jahren von verschiedenen Autoren untersucht worden^{2, 3, 4}. Die vorliegende Arbeit soll sich insbesondere mit dem Problem befassen, wie sich das Imaginärpotential, das zu dem vom Schalenmodell her bekannten reellen Potential im optischen Modell noch hinzukommt, auf andere Vorstellungen zurückführen läßt. Die Herleitung eines Imaginärpotentials aus den Kräften zwischen den Nukleonen ist bisher im wesentlichen nach zwei Methoden behandelt worden*, einmal mit Hilfe der GOLDBERGER-Methode⁴ und andererseits mit dem von BRUECKNER angegebenen Störungsverfahren^{5, 6}. Es soll im folgenden ein Vergleich dieser beiden Methoden durchgeführt werden, wobei sich herausstellen wird, daß für das Problem der Berechnung des Imaginärpotentials beide Verfahren bis auf geringfügige Abweichungen dasselbe liefern.

Zunächst soll die Herleitung des imaginären Potentials nach jeder dieser beiden Methoden kurz skizziert werden (Abschnitt 1 und 2). Ein Vergleich und eine genaue Diskussion der dabei gewonnenen Endformeln wird dann in Abschnitt 3 durchgeführt.

Es sei noch bemerkt, daß sowohl die GOLDBERGER-Methode als auch die BRUECKNERSche Störungstheorie

von der Voraussetzung ausgehen, daß die Absorption im Kern klein ist. Aus der empirisch bekannten Energieabhängigkeit des Imaginärpotentials kann man daher entnehmen, daß die im folgenden verwendeten Methoden in ihrer Gültigkeit auf den Bereich kleiner Energien beschränkt sind (etwa von 1 bis 10 MeV). Es ist jedoch anzunehmen, daß innerhalb des genannten Bereiches die angeführten Verfahren eine gute Näherung an die wirklichen Verhältnisse darstellen.

I. Die Goldberger-Methode

Die Strecke λ_A , auf der im Inneren des Kerns das Quadrat der Wellenfunktion $|\psi|^2$ des einfallenden Teilchens auf den e -ten Teil abgefallen ist, wird identifiziert mit der mittleren freien Weglänge eines Teilchens im Kern. Die freie Weglänge λ soll nach der GOLDBERGER-Methode berechnet werden, womit λ_A und damit das Imaginärpotential bekannt ist.

Um den Zusammenhang zwischen λ_A und dem Imaginärpotential zu untersuchen, stellen wir den Kern durch ein vereinfachtes eindimensionales Modell dar:

$$V(r) = \begin{cases} -(V_1 + iV_2) & \text{für } r \leq R, \\ 0 & \text{für } r > R. \end{cases}$$

Die Wellenfunktion des einlaufenden Teilchens lautet dann:

$$\psi(r) = \begin{cases} \exp(-i\kappa_0 r) & \text{für } r \leq R, \\ \exp(-ik_0 r) & \text{für } r > R. \end{cases}$$

und mit $\kappa_0 = \kappa_1 + i\kappa_2$ ist

* Diejenigen Versuche, die zur Begründung des Imaginärpotentials vom kollektiven Modell ausgehen und vermutlich nur für sehr kleine Energien Gültigkeit besitzen, sollen hier nicht näher diskutiert werden.

⁵ K. A. BRUECKNER, R. J. EDEN u. N. C. FRANCIS, Phys. Rev. **100**, 891 [1955].

⁶ K. A. BRUECKNER, Phys. Rev. **103**, 172 [1956].

¹ H. FESHBACH, C. E. PORTER u. V. F. WEISSKOPF, Phys. Rev. **96**, 458 [1954]. — H. L. FRIEDMANN u. V. F. WEISSKOPF, Niels Bohr and the development of Physics, London 1955.

² A. M. LANE, R. G. TOMAS u. E. P. WIGNER, Phys. Rev. **98**, 693 [1955]. — C. BLOCH, Nucl. Phys. **3**, 137 [1957].

³ A. BOHR u. B. MOTTELSON, Kgl. Danske Videnskab. Math. Fys. Medd. **27**, 16 [1953].

⁴ A. M. LANE u. C. F. WANDEL, Phys. Rev. **98**, 1554 [1955]. — P. MITTELSTAEDT, Z. Naturforsch. **11 a**, 663 [1956].



$$\psi(r) = \exp(-i\alpha_1 r + \alpha_2 r)$$

exponentiell abklingend und damit

$$\lambda = \lambda_A = 1/2 \alpha_2.$$

Mit ($\hbar = 1$)

$$\alpha_2^2 = (k_0^2 + 2mV_1) + i2mV_2 = k_1^2 + i2mV_2$$

und der Annahme, daß die Transparenz des Kerns genügend groß ist, d. h. $V_2/V_1 \ll 1$,

folgt
$$V_2 = \frac{1}{2m} \frac{k_1}{\lambda},$$

und wegen
$$E_1 = \frac{k_1^2}{2m}$$

ist
$$V_2 = \sqrt{\frac{E_1}{2m}} \frac{1}{\lambda}. \quad (1)$$

Wir berechnen nun die mittlere freie Weglänge eines Nukleons im Kern nach GOLDBERGER: In Übereinstimmung mit der eben eingeführten Bezeichnung nennen wir den Impuls des stoßenden Teilchens vor dem Stoß \mathbf{k}_1 , nach dem Stoß \mathbf{k}_1' , und entsprechend \mathbf{k}_2 bzw. \mathbf{k}_2' die Impulse des gestoßenen (Target-) Nukleons. Weiter sei

$$\mathbf{k} = (\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_2)/2, \quad \mathbf{k}' = (\mathbf{k}_1' - \mathbf{k}_2')/2.$$

Es soll nun der über alle im Kern möglichen Stöße des Primärteilchens mit einem Target-Nukleon gemittelte Querschnitt σ gebildet werden. Für die Impulsverteilung der Nukleonen im Kern nehmen wir dabei die eines vollständig entarteten FERMI-Gases an. Ist $\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega'$ der differentielle Querschnitt eines Zwei-Nukleonenstoßes im Schwerpunktsystem, so lautet der gemittelte Querschnitt⁴:

$$\sigma = \frac{3}{4\pi k_1 k_F^3} \int d\mathbf{k}_2 \int 2k \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega'. \quad (2)$$

k_F ist der FERMIsche Grenzimpuls. Bei der Integration ist wegen des PAULI-Prinzips darauf zu achten, daß

$$k_2 \leq k_F, \quad k_1' \geq k_F, \quad k_2' \geq k_F \quad (2a)$$

ist. $\sigma d\Omega'$ soll dabei ein Mittelwert über den Neutron-Neutron-Querschnitt $\sigma_{NN} d\Omega'$ und den Proton-Neutron-Querschnitt $\sigma_{PN} d\Omega'$ darstellen. Sind Z bzw. N die Zahlen der Protonen bzw. Neutronen im Kern, so ist also

$$\sigma d\Omega' = (Z \sigma_{PN} d\Omega' + N \sigma_{NN} d\Omega') / (Z + N).$$

Die mittlere freie Weglänge ist damit

$$\lambda = 1/\bar{\sigma},$$

wobei $\bar{\sigma}$ die Dichte der Nukleonen im Kern ist. Mit $\lambda = \lambda_A$ erhält man aus (1)

$$V_2 = \frac{1}{2m} k_1 \bar{\sigma},$$

und wegen
$$\bar{\sigma} = k_F^3 \frac{2}{(3\pi^2)}$$

ist
$$V_2 = \frac{1}{2m} \bar{\sigma} k_1 k_F^3 \frac{2}{(3\pi^2)}$$

und wegen (2)

$$V_2 = \frac{1}{2m\pi^3} \int d\mathbf{k}_2 \int k \sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega', \quad (3)$$

wobei das Integral wieder unter der Bedingung (2a) zu berechnen ist. Der Querschnitt $\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega'$ kann unmittelbar aus dem Experiment entnommen werden. Für den Vergleich von Gl. (3) mit dem in Abschn. 2 diskutierten Ausdruck für V_2 , den man aus der BRUECKNER-Theorie erhält, ist es jedoch zweckmäßig, $\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega'$ durch Matrixelemente auszudrücken.

Es sei S die S -Matrix für die Nukleon-Nukleon-Streuung und $R = S - 1$. Bezeichnet a den Anfangszustand und e den Endzustand, so daß $R_{ae} = \langle a | R | e \rangle$ das Matrixelement ist, so werde R' durch

$$R_{ae} = -2\pi i \delta(E_a - E_e) R'_{ae} \quad (4)$$

definiert, wobei E_a bzw. E_e die Energie des Anfangs- bzw. Endzustandes bezeichnen, also

$$E_a = E_1 + E_2 \quad \text{und} \quad E_e = E_1' + E_2'.$$

Betrachten wir die Teilchen vor und nach dem Stoß als frei, so gilt außerdem noch der Impulssatz, und man erhält für den gesuchten Querschnitt⁷, wobei die Wellenfunktionen auf die Dichte 1 normiert sind:

$$\sigma(\mathbf{k}, \mathbf{k}') d\Omega' = \frac{m}{2k} \sum \frac{d\Omega'}{(2\pi)^2} \cdot \int \mathbf{k}_1' d\mathbf{k}_1' \delta(E_a - E_e) |R_{ae}|^2. \quad (5)$$

Die Summe Σ läuft dabei über die Spin- und Isospinzustände. Das Imaginärpotential lautet damit

$$V_2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^6} \sum \int d\mathbf{k}_2 \int d\mathbf{k}_2' \delta(E_a - E_e) |R_{ae}|^2. \quad (6)$$

II. Die Brueckner-Methode

In den BRUECKNERSchen Rechnungen wird zur Beschreibung des Stoßes zwischen 2 Nukleonen im

⁷ W. PAULI, Feldquantisierung, Akademische Buchgenossenschaft, Zürich 1951.

Kern nicht die diesem Prozeß entsprechende S -Matrix, sondern die durch

$$R = S - 1 = \frac{-iK}{1 + \frac{1}{2}iK}$$

definierte K -Matrix verwendet. Der Grund dafür ist, daß die K -Matrix, die die zur Behandlung stationärer Probleme angemessene Größe ist, schon aus der BRUECKNERSCHEN Untersuchung der Absättigung⁸ genauer bekannt ist. Wenn man annimmt, daß die Übergangsrate klein ist, daß also der Kern als sehr transparent angesehen werden kann, so wird der Fehler, den man durch die Ersetzung von R durch K macht, nicht sehr wesentlich sein⁵.

Bezeichnet man wie bisher die Koordinaten des ankommenden Teilchens mit l , und mit R_{li} den R -Operator zwischen dem Primärteilchen und dem i -ten Target-Nukleon, so ist nach BRUECKNER das komplexe Potential zunächst^{5,6}

$$V_1 + iV_2 = \sum_{i=2}^{A+1} \langle \psi(A) R'_{li} \psi(A) \rangle, \quad (7)$$

wobei $\psi(A)$ die Wellenfunktion des Kernes im Grundzustand ist und R_{ae} entsprechend Gl. (4) definiert ist.

Zur Berechnung des Potentials gehen wir aus von der Tatsache, daß wegen der Unitarität der S -Matrix $\Im m k'_{1i} = -\pi \sum_{m,n} |R'_{1i,mn}|^2 \delta(E_1 + E_i - E_m - E_n)$

ist. Ersetzt man nun im Sinne der oben diskutierten Näherung

$$|R'_{1i,mn}|^2 \text{ durch } |K'_{1i,mn}|^2,$$

wobei K_{ae} entsprechend zu Gl. (4) durch

$$K_{ae} = 2\pi \delta(E_a - E_e) K'_{ae} \quad (8)$$

definiert ist (a und e sollen wieder Anfangs- und Endzustand bedeuten und K_{ae} bzw. K'_{ae} die entsprechenden Matrixelemente), so erhält man für das Imaginärpotential V_2 folgende Gleichung:

$$V_2 = \sum_i \sum_{m,n} |K'_{1i,mn}|^2 \delta(E_1 + E_i - E_m - E_n). \quad (9)$$

i läuft über alle besetzten, m und n laufen über die unbesetzten Nukleonenzustände. Im Grenzfall des unendlich großen Kernes, der hier als Näherung verwendet werden soll, sind die Einteilchenfunktionen

ebene Wellen. Man kann daher die Summation über die Impulse durch eine Integration ersetzen. Normiert man die Wellenfunktionen wieder auf die Dichte 1, so ist⁶

$$V_2 = \frac{4\pi}{(2\pi)^6} \sum \int d\mathbf{k}_i \int d\mathbf{k}'_i |K_{ae}|^2 \delta(E_a - E_e), \quad (10)$$

wobei die Summe Σ wieder über alle Spin- und Isotopenspinzustände läuft.

III. Vergleich der beiden Methoden

Der Vergleich der Formeln (6) und (10) zeigt, daß die mit den beiden diskutierten Methoden gewonnenen Ausdrücke für V_2 einige Unterschiede aufweisen. Wir diskutieren die Verschiedenheiten im folgenden getrennt, obwohl sie z. Tl. eng miteinander verbunden sind.

1. An Stelle der in (6) verwendeten R' -Matrix wird in (10) die K' -Matrix verwendet. Es wurde bereits von BRUECKNER⁶ bemerkt, daß die Verwendung der K -Matrix an Stelle von R sich vermutlich dann rechtfertigen läßt, wenn die Übergangsrate nicht zu groß ist. Bei kleinem Imaginärpotential dürfte daher die in (10) gemachte Näherung (Ersetzung von R durch K) keinen alzu großen Fehler ausmachen. Quantitativ bedeutet die Ersetzung von R durch K eine geringfügige Vergrößerung der entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeit.

2. Ein wesentlicher Unterschied zwischen den beiden Rechnungen, der in Formeln (6) und (10) nicht unmittelbar zum Ausdruck kommt, besteht darin, daß für das Realpotential, in dem der Stoß der beiden Teilchen stattfindet, in (6) entsprechend dem naiven Schalenmodell

$$V_1^{(A)} = -V_0$$

und in (10) auf Grund der Untersuchung über die Absättigung⁸

$$V_1^{(B)} = -V_0 + \alpha k_1^2$$

angenommen wurde. Diese Art der Energieabhängigkeit des Potentials läßt sich durch Verwendung einer effektiven Masse m^* ausdrücken. Sieht man zunächst (vgl. aber 3.) von der Veränderung der Matrixelemente durch die Einführung einer effektiven Masse ab, so besteht die Wirkung von m^* darin, daß die stoßenden Teilchen in den Potentialen $V_1^{(A)}$ und $V_1^{(B)}$ verschiedene Energien haben. Das bedeutet, daß bei der Berechnung des Imaginärpotentials ein Faktor $(m^*/m)^3$ vor das Integral tritt^{5,6}. Da m^*/m ,

⁸ K. A. BRUECKNER, C. A. LEVINSON u. H. M. MAHMOUD, Phys. Rev. **95**, 217 [1954]. — K. A. BRUECKNER u. W. WADA, Phys. Rev. **103**, 1008 [1956].

wie BRUECKNER⁸ gezeigt hat, etwa 0,5 ist, verkleinert sich also V_2 bei Verwendung von $V_1^{(B)}$ statt $V_1^{(A)}$ etwa um einen Faktor 8.

3. Außer dem eben diskutierten Effekt hat jedoch die Verwendung von m^* statt m auch eine direkte Änderung der Übergangswahrscheinlichkeiten zur Folge⁶. Verwendet man m^* statt m , so wird die Übergangswahrscheinlichkeit dadurch verkleinert. Andererseits konnte BRUECKNER zeigen⁶, daß diese Verkleinerung etwa kompensiert wird durch die Vergrößerung, die die Übergangselemente durch die Ersetzung von R durch K erfahren haben (vgl. 1.). Wie bereits oben bemerkt wurde, ist der Fehler, der durch die Ersetzung R durch K entsteht, bei kleinen Streuenergien vermutlich sehr klein, so daß also auch der Einfluß der effektiven Masse auf die Übergangswahrscheinlichkeiten als klein angesehen werden kann.

Zusammenfassend läßt sich somit also folgendes sagen: Der Vorteil der BRUECKNERSCHEN Formel (10) gegenüber (6) besteht darin, daß die Energieabhängigkeit von V_1 in Form einer effektiven Masse berücksichtigt wurde. Es hat sich jedoch gezeigt, daß die Matrixelemente bei der Ersetzung von m^* durch m nur sehr wenig geändert werden, ebenso wie eine Ersetzung von R durch K an den Matrixelementen nur wenig ändert. Es dürfte daher das einfachste sein, anstatt die Matrixelemente explizit aus der BRUECKNERSCHEN Störungstheorie zu berechnen, so wie in Gl. (3) von vornherein von den empirischen Querschnitten für die Nukleon-Nukleon-Streuung auszugehen. Die Energieabhängigkeit von V_1 macht sich dann nur noch in der Tatsache bemerkbar, daß die stoßenden Teilchen sich in einem energieabhängigen Potential bewegen, wodurch ihre Energie gegenüber einem energieunabhängigen V_1 verändert wird. Dieser Effekt ist jedoch sehr wesentlich, denn er verändert das Imaginärpotential V_2 um einen Faktor $(m^*/m)^3 \approx 1/8^5$.

Man hätte also einen Zweiteilchenstoß nach der GOLDBERGER-Methode in einem energieabhängigen Potential zu untersuchen. Eine Bestimmung von V_2 nach dieser Methode hat den Vorteil, daß nur noch beobachtbare Größen in die Theorie eingehen. Die Querschnitte für die Nukleon-Nukleon-Stöße kann man aus den Streuexperimenten entnehmen. Auch zur Berücksichtigung der effektiven Masse braucht man jetzt nicht mehr auf die BRUECKNERSCHE Theorie zurückzugreifen, sondern kann die Streuung unmittelbar in dem empirisch bekannten Realpotential V_1 untersuchen. Ein solches Vorgehen hat den Vorteil, daß man die wirklichen Werte von V_1 verwenden kann und nicht wie BRUECKNER auf die Benutzung eines m^* angewiesen ist, das aus den Absättigungsrechnungen folgt, also zunächst nur für Zustände mit kleiner Energie richtig ist.

Ein nach dieser Methode berechnetes Imaginärpotential V_2 ist jedoch vermutlich wesentlich kleiner als der experimentell gefundene Wert. Der Grund dafür ist einmal in den fehlenden komplizierten Anregungszuständen des COMPOUND-Kernes zu suchen und weiterhin in der Verwendung einer Impulsverteilung für die Nukleonen, die einem idealen FERMI-Gas entspricht⁶. Eine Aussage über die Impulsverteilung läßt sich aber aus der Energieverteilung der inelastisch gestreuten Protonen bei hoher Energie entnehmen⁹. Die Verwendung dieser so gewonnenen experimentellen Impulsverteilung in der Berechnung von V_2 sollte dann – abgesehen von dem vermutlich kleinen Fehler, der durch die Vernachlässigung der komplizierten Anregungszustände entsteht (vgl. dazu Anm.⁶) – den experimentellen Wert im wesentlichen richtig wiedergeben.

Herrn Prof. W. HEISENBERG, sowie den Herren Dr. W. BREINIG und R. HÜPER danke ich für zahlreiche Diskussionen.

⁹ I. B. CLADIS, W. N. HESS u. B. J. MOYER, Phys. Rev. **87**, 425 [1952].